



SESSION DU 14 MAI 2021

**CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
DU CYCLE INGENIEUR EN AGRO-INDUSTRIE
GEOLOGIE ET ENVIRONNEMENT**

Epreuve de Mathématiques

Durée : 2h

L'épreuve comporte deux exercices et un problème tous obligatoires.

Exercice 1 : 5,5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$ et les points a , B et C d'affixes respectives $1 - i$, $2 - i$ et $-1 + 2i$. S est la similitude directe de centre B qui transforme C en A .

- 1) Montrer que $1 - i$ et $2 - i$ sont des racines de P . 1,5pt
- 2) En déduire toutes les racines de P . 1pt
- 3) Placer les points A , B et C dans le repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . 1pt
- 4) Donner en justifiant la nature exacte du triangle ABC . 1pt
- 5) Déterminer le rapport et l'angle de S . 1pt

Exercice 2 : 3 points

Une urne contient quatre boules noires, trois boules vertes et deux boules blanches toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de tirer des boules unicolores. 1pt
- 2) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche. 1pt
- 3) Calculer la probabilité de tirer pour la première fois une boule blanche au deuxième tirage. 1pt

Problème : 11,5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ et $g(x) = x^2 - 2\ln x + 2$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité graphique 2 cm.

- 1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en 0^+ . 1pt
- 2) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée. 1pt
- 3) Dresser le tableau des variations de g . 0,5pt

- 4) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$. **0,5pt**
- 5) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0^+ . **1pt**
- 6) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **1,5pt**
- 7) Dresser le tableau des variations de f . **0.5pt**
- 8) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) puis étudier leurs positions relatives. **1,5pt**
- 9) Donner une équation de la deuxième asymptote à (C). **0,5pt**
- 10) Déterminer les coordonnées du point A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (D). **1pt**
- 11) Tracer soigneusement (C) ; (D) et (T). **1,5pt**
- 12) Calculer, l'aire en centimètres carrés du domaine plan limité par (D) ; (C) et les droites $x = 1$ et $x = e$. **1pt**